12/10/2016

Βασικά Αξιώματα

1) Αξιώματα Θέσης
2) Αξιώματα Διάταξης
3) Αξιώματα ισότητας
4) Αξιώματα συνέχειας

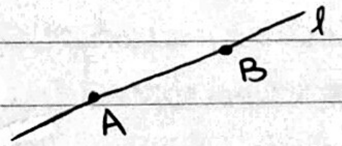
+ 5ο Αίτημα (η ύπαρξη του και η μορφή του καθορίζει το είδος της γεωμετρίας.

§1 Αξιώματα Θέσης

Αρχικά προϋποθέτουμε την ύπαρξη ενός συνόλου E (E: επίπεδο)

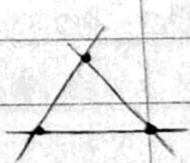
- Αν $P \in E \Rightarrow P$ "σημείο"
- Συγκεκριμένα $\subseteq E$ τα λέμε "ευθείες"

Θ1: Αν A, B διακεκριμμένα σημεία του E (δηλ. $A \neq B$) υπάρχει μοναδική ευθεία l έτσι ώστε $A, B \in l$



Θ2: Αν l ευθεία στο E, σε αυτήν υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία διαφορετικά

Θ3: Υπάρχουν στο επίπεδο E τρία (3) μη συνευθειακά σημεία



ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν l, m διαφορετικές ευθείες στο E τότε έχουν 1 το πολύ κοινό σημείο

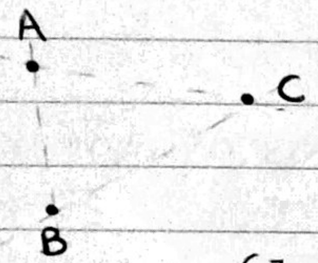
Αποδ// $l \neq m$. Με άτοπο. Άρα έστω ότι $\exists$ τουλάχιστον 2 σημεία A, B με $A \neq B$: $A, B \in l$, $A, B \in m$

Από το Θ1 (και τη μοναδικότητα) $\rightarrow l = m$ (άτοπο)

Άρα έχουν 1 το πολύ κοινό σημείο. ■

→ Κατασκευάζουμε ένα σύνολο (Ε, σημεία, ευθείες) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα Θ1, Θ2, Θ3

$E = \{A, B, C\}$ με $A \neq B \neq C$



$A \neq C$

l: "ευθείες" $\subseteq E$

Οι ευθείες που ορίζονται στο μοντέλο είναι οι εξής: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$

Εξετάζουμε αν ισχύουν τα Θ1, Θ2 και Θ3

i) <u>Θ1</u>: A, B $(A \neq B)$. Θέτουμε $l = \{A, B\}$

Τότε $A \in l$, $B \in l$.

Υπάρχει άλλη ευθεία m: $A \in m$ και $B \in m$???

Όχι δεν υπάρχει, άρα φανερά ισχύει η μοναδικότητα.

ii) <u>Θ2</u>: φανερό (υπάρχουν εδώ ακριβώς 2 σημεία)

iii) <u>Θ3</u>: διαλέγουμε τα A, B, C.

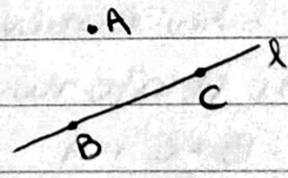
Αν ήταν συνευθειακά τότε το $E = \{A, B, C\}$ θα ήταν ευθεία

Άτοπο εξ' ορισμού των ευθειών (2-σύνολα)

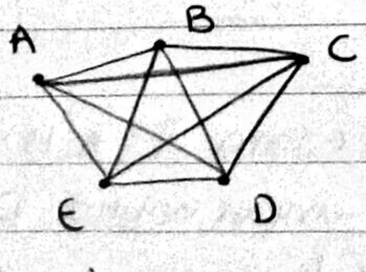
<u>5ο Αίτημα Παραλληλίας (Π)</u>

Από σημείο $A \notin l$, l ευθεία υπάρχει μοναδική παράλληλος l' στην l που διέρχεται από το A.

$l \parallel l' \iff l \cap l' = \emptyset$



Το (Π) δεν ισχύει στο μοντέλο που φτιάξαμε.

→ 

$E_1 = \{A, B, C, D, E\}$ → το επίπεδο που περιέχει τα A, B, C, D, E σημεία

ευθεία: όλα τα 2-σύνολα

Θ1 ισχύει

Θ2 ισχύει

Θ3

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν ισχύει το (Π)

$l = \{C, D\}$ $\quad A \notin l$

$l_1 = \{A, E\}$, $\ l_2 = \{A, B\}$ $\quad$ Τότε $A \in l_1$, $A \in l_2$

$\left.\begin{array}{l} l_1 \parallel l \\ l_2 \parallel l \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \neq l_2$

Άρα δεν ισχύει το (Π) ■

! Θ1, Θ2, Θ3 $\Rightarrow$ (Π) (Το (Π) ανεξάρτητο της ομάδας αξιωμάτων Θ1, Θ2, Θ3)

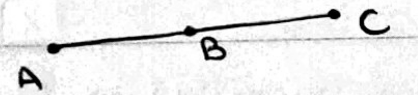
$\forall$ Μοντέλο που ικανοποιεί τα Θ1, Θ2, Θ3 αυτό ικανοποιεί και το (Π)

§2 Αξιώματα Διάταξης

Προϋποθέτουμε ότι υπάρχει μια σχέση της μορφής:
"το σημείο A είναι μεταξύ των B και C" $(B*A*C)$

Δ1: Αν A, B, C ώστε $B*A*C$ τότε τα σημεία αυτά είναι διακεκριμμένα, είναι συνευθειακά και ισχύει επιπλέον ότι $C*A*B$

Δ2: Δοθέντων σημείων (διακεκριμμένων) A, B $(A \neq B)$, $\exists$ σημείο C : $A*B*C$



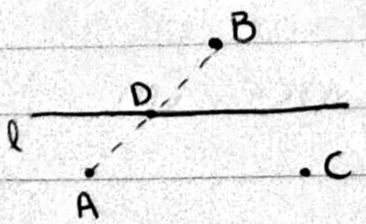
Δ3: Δοθέντων 3 συνευθειακών διακεκριμμένων σημείων ένα και μόνο ένα από αυτά είναι μεταξύ των άλλων 2.

$A*C*B \Leftrightarrow B*C*A$

$A*B*C$

$B*A*C$

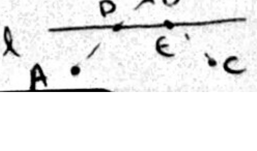
Δ4: Δίνονται 3 όχι συνευθειακά σημεία και μια ευθεία l: $A, B, C \notin l$



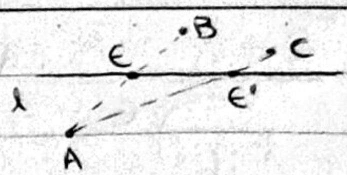
Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει σημείο D τ.ω: $A*D*B$, $D \in l$

$\Rightarrow$ ισχύει ένα και μόνο ένα από τα ακόλουθα

α) Υπάρχει σημείο E: $B*E*C$ και $E \in l$



β) Υπαρχει σημειο E' : $A * E' * C$ και $E' \in l$.



ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίνονται 2 σημεία $A \neq B$. Το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ είναι το σύνολο ($\subseteq$ επιπέδου) που περιέχει τα A, B και όλα τα μεταξύ τους σημεία

$D \in \overline{AB} \leftrightarrow D = A$ ή $D = B$ ή $A * D * B$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω A, B, C 3 μη συνευθειακά σημεία (άρα και διακεκριμένα). Τότε το τρίγωνο $\hat{ABC}$ είναι η ένωση των 3 ευθυγράμμων τμημάτων $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ και κορυφές τα A, B, C.

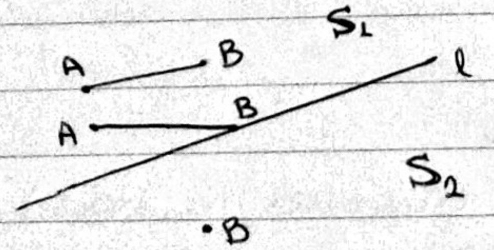
ΠΡΟΤΑΣΗ$^{\perp}$ (Διαχωρισμός με ευθεία l)-ημιεπίπεδα: Δίνεται ευθεία l στο επίπεδο. Τότε ονομάζουμε $\underline{o} =:$ το σύνολο των σημείων του επιπέδου A ε.ω $A \notin l$.
(↳ έτσι ώστε)

→ Θδ.ο $\exists\ S_1, S_2$ σύνολα σημείων ώστε $\underline{o} = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \neq \emptyset$, $S_2 \neq \emptyset$ με τις ιδιότητες

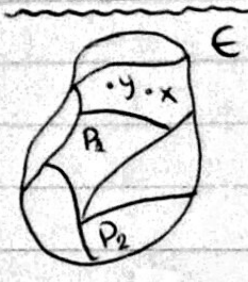
$A, B \in \underline{o} \leftrightarrow A, B \notin l$.

α) Αν $A, B \in S_i$ (για κάποιο $i = 1, 2$) με $A, B \in \underline{o} \leftrightarrow A, B \notin l$
Τότε $\overline{AB} \cap l = \emptyset$

β) Αν π.χ $A \in S_1$, $B \in S_2$ → $\overline{AB} \cap l = \emptyset$



Σχέση Ισοδυναμίας



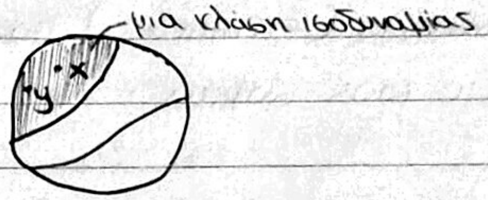
"$\sim$" στο E ισοδυναμία αν

i) $x \sim x \quad \forall x \in E$

ii) $x \sim y \iff y \sim x \quad \forall x, y \in E$

iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$(E, \sim)$ $\quad x \sim y \Rightarrow 7 \mid x-y$



$(E, \sim)$ σχέση ισοδυναμίας

$x \in E$

$\kappa\lambda_{\sim}(x) = \{ y \in E : y \sim x \}$

$x \sim x' \iff \kappa\lambda_{\sim} x = \kappa\lambda_{\sim} x'$

$x \not\sim x' \quad \kappa\lambda_{\sim}(x) \cap \kappa\lambda_{\sim}(x') = \emptyset$

Απόδειξη Πρότασης 1) Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο

$\mathcal{O} = (\text{επίπεδο}) - \{l\} = \{ A : A \notin l \}$

Έστω $A, B \in \mathcal{O}$, $(A, B \notin l)$

$\underbrace{A \sim B}_{\text{ορισμ.}} \iff (\overline{AB} \cap l = \emptyset)$ ή $(A = B)$

1) Ανακλαστικότητα $\quad A \sim A$

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Υποθέτουμε ότι $A \neq B$

$A \sim B \Rightarrow \overline{AB} \cap l = \emptyset$. Αρκεί ν.δ.ο $\overline{BA} \cap l = \emptyset$.

Αλλά $\overline{AB} = \overline{BA}$

$\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C : A * C * B\}$

$\overline{BA} = \{B\} \cup \{A\} \cup \{C' : B * C' * A\}$

Άρα $\overline{AB} = \overline{BA} \Rightarrow \overline{BA} \cap l = \emptyset \Rightarrow B \sim A$

Ομοίως $B \sim A \Rightarrow A \sim B$

3) Μεταβατικότητα

Αν $A, B, C \notin l$, $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

• 1η περίπτωση: A, B, C όχι συνευθειακά (άρα διαφορετικά ανά 2)

Έστω ότι $A \not\sim C$ (A όχι ισοδύναμο με το C

$\neg(A \sim C)$)

$A \not\sim C \Rightarrow \overline{AC} \cap l \neq \emptyset$

Άρα (Pasch) είτε (1) $\longrightarrow$ $l \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ (a_1)

ή $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ (a_2)

και μόνο ένα από τα δύο παρακάτω ισχύει

$(a_1) \Rightarrow A \not\sim B$ ή

$(a_2) \Rightarrow B \not\sim C$ άτοπο από υπόθεση

• 2η περίπτωση

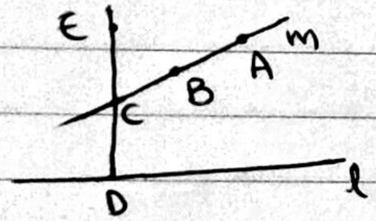
$A, B, C \notin l$

$A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ και τα A, B, C είναι συνευθειακά

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας (για να δείξουμε το ζητούμενο) ότι $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$.

Άρα υπάρχει μοναδική ευθεία m: $A, B, C \in m$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει σημείο $D \in l - m$



πρώτα $l \neq m$ αφού $A \in m$, $A \notin l$

Οι ευθείες l, m λοιπόν είναι διαφορετικές.

Άρα τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο

Όμως στην ευθεία l $\exists$ τουλ. 2 σημεία (Θ2)

Άρα $\exists$ τέτοιο στοιχείο D, $D \in l$, $D \notin m$

Άρα από Δ2 $\exists E: E * C * D$ ⊛

a) $E \notin l$ διότι αν $E \in l$ εφόσον $D \in l$ και από την ⊛ $E \neq D$

$\Rightarrow$ ευθεία $ED = l$ (Θ1)

$C \notin l$ $\quad C \in$ ευθεία ED (άτοπο)

Ας υποθέσουμε ότι $E \in m$. Όμως $C \in m$. Άρα ευθεία $EC = m$

$D \in$ ευθεία $(\overset{m}{EC})$

Όμως $D \notin m$ άτοπο

Άρα τελικά $E \notin m$ και $E \notin l$.

$E * C * D$ (1)

b) $E \sim C$ (Ισχυρισμός)

Άρα αν $E \not\sim C \Rightarrow \overline{EC} \cap l \neq \emptyset \Rightarrow \exists D_1 : D_1 \in l \cap \overline{EC}$

Όμως η ευθεία $\overline{EC}$ έχει 1 ακριβώς σημείο τομής με την l

$\overline{EC} \subseteq$ ευθείας EC $\Rightarrow D_1 = D \rightarrow D \in \overline{EC} \rightarrow E * D * C$ (2)

(Δ3) άτοπο

Άρα $\boxed{E \sim C}$ (2)

$E \notin m \rightarrow E, B, C$ όχι συνευθειακά $\boxed{B \sim C}$

<u>1η περίπτωση</u> $\Rightarrow E \sim C$

$\left.\begin{array}{l} E \notin m \rightarrow E, A, B \text{ όχι συνευθειακά} \\ A \sim B \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Pasch}} E \sim A$ (3)

Στόχος $A \sim C$

$\left.\begin{array}{l} A, E, C \text{ μη συνευθειακά} \\ E \sim C \; , E \sim A \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Pasch}} A \sim C$